The Moore Penrose Inverse of Interval valued Neutrosophic Fuzzy Matrices

[1]Mageswari V [2]Anitha T [3]Uthra G

[1]Department of Mathematics, Annamalai University, Annamalainagar, Chidambaram, Tamilnadu, India

[2]Department of Mathematics(Deputed form Annamalai University),Alagappa Chettiar Government College of Engineering & Technology, Karaikudi, Tamilnadu, India

[1]Department of Mathematics, Pachaiyappa's college, Chennai.

Article Info
Page Number: 13568 - 13589
Publication Issue:
Vol 71 No. 4 (2022)

Article History
ArticleReceived:15 September2022
Revised: 15 October 2022
Accepted:20 December 2022

Abstract: This work presents a method to discover the g-inverse of interval valued Neutrosophic intuitionistic fuzzy matrix's (IVNFM). Additionally, the concept of an interval valued intuitionistic fuzzy vector's standard basis is presented. A few findings about the g-inverse of IVNFM are examined.

Keywords: Neutrosophic fuzzy set, NFM, generalized inverse (g-inverse), IVNFM

1. Introduction

A generalization of the matrix inverse to the case of a singular or non-square matrix is known as the generalized inverse (g -inverse).Similar to the inverse of matrices, the g-inverse of matrices finds significance in numerous applications, including associative memories, robotics, control, and signal processing. Zadeh [1] first introduced fuzzy sets (FSs) in 1965. These are traditionally defined by their membership value or grade of membership. Assigning membership values to a fuzzy set can sometimes be challenging. Atanassov [2] introduced intuitionistic FSs to solve the problem of assigning non-membership values. Smarandache [25] introduced the concept of neutrosophic sets (NSs) to handle indeterminate information and deal with problems that involve imprecision, uncertainty, and inconsistency.

Cen [3,4] has discussed Fuzzy matrix partial ordering and generalized inverses and On generalized inverses of fuzzy matrices.Khan and Pal [5] have studied Intuitionistic fuzzy tautological matrices. Meenakhi and Inbam [6] have characterized The minus partial order in fuzzy matrices.S.K. Mitra[7] has studied Matrix partial order throgh generalized inverses. Xin[8] has focused on Convergence of power of a controllble fuzzy matrices. Shyamal and Pal [9,10] have initiate Interval-valued fuzzy matrices and Two new operators on fuzzy matrices Dehghan,Ghatee and Hashemi,[11] have studied the inverse of a fuzzzy matrix of fuzzy number. Panigrahi and Nanda[12] have studied Intuitionistic fuzzy relations over intuitionistic fuzzy sets. Pal[13] has characterized Intuitionistic fuzzy determinant.

Pal, Khan and Shyamal,[14] have studied Intuitionistic fuzzy matrices.Shyamal and Pal [15,16] have studied distance between intuitionistic fuzzy matrices and its applications and distance between intuitionistic fuzzy matrices. Sriram and Murugadas [17] have studied On semiring of intuitionistic fuzzy matrices. Mondal and Samanta [18] have initiate Generalized intuitionistic fuzzy sets. Bhowmik andPal [19,20,21]have discussed Generalized intuitionistic fuzzy matrices and Some results on generalized interval-valued intuitionistic fuzzy sets and Generalized interval-valued intuitionistic fuzzy sets .

Khan and Pal[22] have studied The generalized inverse of intuitionistic fuzzy matrix. Adak, Bhowmik and Pal [23] have discussed Some properties of generalized intuitionistic fuzzy nilpotent matrices over distributive lattice. Rajkumar Pradhan and Madhumangal Pal [24] have studied The Generalized Inverse of Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Matrices .

1.1 Research Gap

Rajkumar Pradhan and Madhumangal Pal [24] presented the concept of the Generalized Inverse of Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Matrices. Here, we have applied the concept of Interval valued Neutrosophic Fuzzy Matrices .We have examined some of the theorem and extended concept to NFMs. We discussed various g-inverse associated with a regular matrices and obtain characterization of set of all inverses by using Interval valued Neutrosophic Fuzzy Matrices.

2. Definitions and theorems

Definition:2.1 IV Neutrosophic fuzzy matrix (IVNFM): An IV Neutrosophic fuzzy matrix P of order m×n is defined as $P = [x_{ij}, < p_{ij\mu}, p_{ij\lambda}\ p_{ij\nu} >]_{m\times n}$ where $p_{ij\mu}$, $p_{ij\lambda}$ and $p_{ij\nu}$ are the subsets of [0,1] which are denoted by $p_{ij\mu} = [p_{ij\mu L}, p_{ij\mu U}]$, $p_{ij\lambda} = [p_{ij\lambda L}, p_{ij\lambda U}]$ and $p_{ij\nu} = [p_{ij\nu L}, p_{ij\nu U}]$ which maintaining the condition $0 \le p_{ij\mu U} + p_{ij\lambda U} + p_{ij\nu U} \le 3$, $0 \le p_{ij\mu L} + p_{ij\lambda L} + p_{ij\nu L} \le 3$, $0 \le p_{\mu L} \le p_{\mu U} \le 1$, $0 \le p_{\lambda L} \le p_{\lambda U} \le 1$, $0 \le p_{\nu L} \le p_{\nu U} \le 1$ for i = 1,2,⋯,m and j = 1,2,⋯,n.

Definition 2.2 Suppose p and q are two NFM elements $p = < p_{ij\alpha}, \mathrm{p}_{ij\beta}, \mathrm{p}_{ij\gamma} >, \mathrm{q} = < q_{ij\alpha}, \mathrm{q}_{ij\beta}, \mathrm{q}_{ij\gamma} >$, are component wise addition and multiplication are described as,

$$p + q = < \max\left\{p_{ij\alpha}, \mathrm{q}_{ij\alpha}\right\}, \max\left\{p_{ij\beta}, \mathrm{q}_{ij\beta}\right\}, \min\left\{p_{ij\gamma}, \mathrm{q}_{ij\gamma}\right\} >$$

and $\mathrm{p.q} = < \min\left\{p_{ij\alpha}, \mathrm{q}_{ij\alpha}\right\}, \min\left\{1 - p_{ij\beta}, 1 - q_{ij\beta}\right\}, \max\left\{p_{ij\gamma}, \mathrm{q}_{ij\gamma}\right\} >$

Definition2.3(Transpose) The transpose P^T of an NFM $P = \left[p_{ij}\right]_{m\times n}$ is defined as $P^T = \left[p_{ji}\right]_{n\times m}$ where $p_{ji} = < p_{ji\alpha}, \mathrm{p}_{ji\beta}, \mathrm{p}_{ji\gamma} >$.

Definition 2.4 (IFPM) If each row and each column contains accurately one <1,1,0> and all other entries are <0,0,1> in a square NFM, it is known as intuitionistic Fuzzy permutation matrix.

Definition 2.5 For $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in$ (IVNFM)m is called symmetric IVNFM if $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

Definition 2.6 For P $=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ and Q = $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$ be two IVIFMs. Then,

$$P+Q=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=[<[\max(P_{ij\mu L},Q_{ijvL}),\max(P_{ij\mu U},Q_{ijvU})]>,<[\min(P_{ij\mu L},Q_{ijvL}),\min(P_{ij\mu U},Q_{ijvU})]>,$$

$$<[\min(P_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda L}),\min(P_{ij\lambda U},Q_{ij\lambda U})]>]$$

$$P.Q=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

Example:2.1 Let us consider IVNFM

$$P=\begin{bmatrix}<[0,0],[1,1],[1,1]> & <[0.1,0.3],[0.2,0.4],[0.2,0.5]> \\ <[0.1,0.3],[0.2,0.4],[0.2,0.5]> & <[0,0],[1,1],[1,1]>\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}<[0,0],[1,1],[1,1]> & <[0.2,0.4],[0.3,0.5],[0.1,0.5]> \\ <[0.2,0.4],[0.3,0.5],[0.1,0.5]> & <[0,0],[1,1],[1,1]>\end{bmatrix}$$

$$P+Q=\begin{bmatrix}<[0,0],[1,1],[1,1]> & <[0.2,0.4],[0.2,0.4],[0.1,0.5]> \\ <[0.2,0.4],[0.2,0.4],[0.1,0.5]> & <[0,0],[1,1],[1,1]>\end{bmatrix}$$

$$PQ=\begin{bmatrix}<[0,0],[1,1],[1,1]> & <[0.1,0.3],[0.3,0.5],[0.2,0.5]> \\ <[0.1,0.3],[0.3,0.5],[0.2,0.5]> & <[0,0],[1,1],[1,1]>\end{bmatrix}$$

Definition 2.7 For P $=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in$ (IVNFM)m and the transpose is $P^T=\left[<[P_{ji\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{jivL},P_{ijvU}],[P_{ji\lambda L},P_{ji\lambda U}]>\right]$.

Definition 2.8 For P $=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in$ (IVNFM)m and the complement is $\overline{P}=\left[<[P_{ij\mu U},P_{ij\mu L}],[P_{ijvU},P_{ijvL}],[P_{ij\lambda U},P_{ij\lambda L}]>\right]$

Definition 2.9 For $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in$ (IVNFM)m is called idempotent IVIFM if $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^2=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

Definition 2.10 (IVIFPM) If each row and each column contains accurately one < [1, 1], [1, 1], [0, 0] > and all other entries are < [0, 0],[1, 1], [1, 1]>in a square NFM, it is known as intuitionistic Fuzzy permutation matrix.

Example: Let us consider IVNFM $\left[< [S_{ij\mu L}, S_{ij\mu U}], [S_{ijvL}, S_{ijvU}], [S_{ij\lambda L}, S_{ij\lambda U}] \right]$

$$= \begin{bmatrix} < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > & < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > & < [1,\ 1],[1,\ 1],\ [0,\ 0] > \\ < [1,\ 1],[1,\ 1],\ [0,\ 0] > & < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > & < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > \\ < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > & < [1,\ 1],[1,\ 1],\ [0,\ 0] > & < [0,\ 0],\ [1,\ 1],[1,\ 1] > \end{bmatrix}$$

Definition:2.11 For $\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \in$ (IVNFM)$_{m\times n}$ and another IVNFM $\left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right] \in$ (IVNFM)$_{n\times m}$ satisfies the following four condition is called moore penrose inverse.

(i) $\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right]$ $\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] = \left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}] > \right]$
(g-inverse)

(ii) $\left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right]$ $\left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right]$
$= \left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right]$ (2-inverse)

(iii) $\left(\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right] \right)^T = \left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right]$
{1,3} inverses)

(iv) $\left(\left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \right)^T$

$= \left[< [K_{ij\mu L}, K_{ij\mu U}], [K_{ijvL}, K_{ijvU}], [K_{ij\lambda L}, K_{ij\lambda U}] > \right] \left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right]$ {1,4} inverses).

Theorem 2.1. Let $\left(\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right], \left[< [Q_{ij\mu L}, Q_{ij\mu U}], [Q_{ijvL}, Q_{ijvU}], [Q_{ij\lambda L}, Q_{ij\lambda U}] > \right] \right) \in F_{m\times n}$

be a two IVIFMs. If $\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right]$ is regular then,

(a)
$R\left(\left[< [Q_{ij\mu L}, Q_{ij\mu U}], [Q_{ijvL}, Q_{ijvU}], [Q_{ij\lambda L}, Q_{ij\lambda U}] > \right] \right) \subseteq R\left(\left[< [P_{ij\mu L}, P_{ij\mu U}], [P_{ijvL}, P_{ijvU}], [P_{ij\lambda L}, P_{ij\lambda U}] > \right] \right)$

iff $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ for each $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

(b)
$C\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\right)\subseteq C\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

iff $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$ for each $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

Proof:

Let
$R\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\right)\subseteq R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$
then each row of $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$ is a linear combination of the rows of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]_{i^*}=\sum\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]_{j^*}$ Where
$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in F$

That is $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

For some $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in F_m$.

or $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

(Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$)

or $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Conversely, if $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$

$=\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ then

$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

For some $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in F_m$.

or $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

(Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$)

This implies that $R\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\right)\subseteq R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

(ii) Let $C\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\right)\subseteq C\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

Then $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$ (for some $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\in F_m$)

or $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$

(As $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$)

That is $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$

Conversely, if $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$

$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}$ $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$,then $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}]>\right]=$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$

(for some $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$)

or $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$

(as $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{-}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$)

That is $C\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ij\nu L},Q_{ij\nu U}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\right)\subseteq C\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$.

Theorem 2.2 Let $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_{mn}$ be the regular IVNFM $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ be a g-inverse of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ .Then

(i) $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]^{T}\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{T}\{1\}$

(ii) If $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ij\nu L},S_{ij\nu U}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ij\nu L},T_{ij\nu U}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]$ are IVNFPMs, then $\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ij\nu L},T_{ij\nu U}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]^{T}\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ij\nu L},S_{ij\nu U}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^{T}\in\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ij\nu L},S_{ij\nu U}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

(iii) $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ are idempotent.

Proof: Let $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ be a g-inverse of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Then $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ holds. Taking transform on both sides, we get

$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]^T$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

This implies that $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]^T\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T\{1\}$

(ii) Since $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]$ are IVNFPMs,

$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}]>\right]$ invertible and

$$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^{-1}=\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

$$\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]^{-1}=\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

Now

$$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$\begin{pmatrix}\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^T\end{pmatrix}$$

$$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left(\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]^T\right)$$

$$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\begin{pmatrix}\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^T\\ \left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\end{pmatrix}$$

$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]$$

(as $\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]^T$ = I

$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$=I)(as
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=$
$\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[Q_{ij\mu L},Q_{ij\mu U}],[Q_{ijvL},Q_{ijvU}],[Q_{ij\lambda L},Q_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]^T$
$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]^T$
$\in\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[T_{ij\mu L},T_{ij\mu U}],[T_{ijvL},T_{ijvU}],[T_{ij\lambda L},T_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

(iii)Again$\left(\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$
$\left(\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$
$=\left(\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}]>\right]\right)$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$=\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$=\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$$

Thus $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ij\nu L},G_{ij\nu U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ are idempotent.

Theorem 2.3 Let $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ be an IVIFM $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$, $\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$ $\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$ and $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$.Then $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,2\}$ that is $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ is a semi inverse of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Proof:

Since $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$, $\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$ $\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

$$\Rightarrow\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\Rightarrow\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}]>\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

as $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$

So, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$$\begin{pmatrix}\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\end{pmatrix}$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$$
$$\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

Also,

$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=$$
$$\left(\begin{array}{l}\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\end{array}\right)$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$\left(\begin{array}{l}\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\end{array}\right)$$

$$=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)$$
$$\left(\begin{array}{l}\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]\end{array}\right)=$$
$$\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left(\begin{array}{l}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\end{array}\right)$$
$$\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[Z_{ij\mu L},Z_{ij\mu U}],[Z_{ij\nu L},Z_{ij\nu U}],[Z_{ij\lambda L},Z_{ij\lambda U}]\right]$$

$$=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$$

So, $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ is a semi inverse of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

Theorem 2.4 Let $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_{mn}$ be an IVNFM and $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$,then

$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{2\}$ if and only if $R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

$=R\left(\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right).$

Proof: $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$ implies

$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$

That is $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

Hence

$$R\left(\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)=R\begin{pmatrix}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\end{pmatrix}.$$

(Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ is idempotent)

Conversely, let $R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)$
$=R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right).$ Then for pair of matrices $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right],\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ if the product $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ is defined so, $R\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)$
$\subseteq R\left(\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right).$

That is, $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$, for some $\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ij\nu L},Y_{ij\nu U}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\in F_m$

So, $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ij\nu L},P_{ij\nu U}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ij\nu L},x_{ij\nu U}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

$$=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)$$

or, $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\begin{pmatrix}\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\\ \left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\end{pmatrix}$$
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[Y_{ij\mu L},Y_{ij\mu U}],[Y_{ijvL},Y_{ijvU}],[Y_{ij\lambda L},Y_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=$$
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$$

Hence,
$$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{2\}.$$

Theorem 2.5. If $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ be a symmetric and idempotent IVNFM then $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself a least square g - inverse.

Proof. Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is symmetric, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{T} = \left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is idempotent, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^2 = \left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Now $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

if $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]=I_n$

Then $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$

$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^2$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

That is $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

Now $\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\right)^T$

$$=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

$$=\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$$

(Taking $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ as $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself a g-inverse)

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=$$
$$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right].$$

This implies $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$.

Theorem 2.6. If $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ be a symmetric and idempotent IVNFM then $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself a minimum norm g - inverse.

Proof. Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is symmetric, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^{\mathrm{T}}$ = $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ and $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is idempotent, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^2$ = $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Now $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

if $\left[<[S_{ij\mu L},S_{ij\mu U}],[S_{ijvL},S_{ijvU}],[S_{ij\lambda L},S_{ij\lambda U}]>\right]=I_n$

That is $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

Now $\left(\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\right)^T$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

$$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]^T$$

(Taking $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ as $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself a g-inverse)

$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=$
$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

This implies $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$.

Theorem 2.7. If $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ be a symmetric and idempotent IVNFM, then $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$ for all $\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ such that $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$ is the set of all {1,3} inverses of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$, dominating $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Proof. Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is symmetric and idempotent IVIFM, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ inverse. Let β denote the set $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$ for all $\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ such that $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$.

Suppose
$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$
,then
$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$

Let $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]-\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$=\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$

Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$

$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right].$

Implies, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right].$
…………(1)

.Now, $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ and
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ itself
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ inverse so as the set
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ consists of all solutions for
$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$(as
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is idempotent).

Thus $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]=$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right].$

This gives
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

$=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

That is $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$

Now by (1)
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$

Hence $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}]>\right]\in\beta$

Thus for each $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$ there exists a unique element in β.

Conversely, for any $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$ β,

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]=$
$+\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
with $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$

Hence $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]$
=

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

So, .Now, $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}$.

Theorem 2.8. If $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ be a symmetric and idempotent IVNFM, then

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$for all $\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\in F_n$ such that $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$ $\geq\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

is the set of all {1,4} inverses of $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$, dominating $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Proof. Since $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is symmetric and idempotent IVNFM, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ itself $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ inverse.

Let β denote the set $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$for all $\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}]>\right]\in F_n$ such that $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$

Suppose $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}]>\right]\in\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$,then $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

Let$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]-\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$=\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$

Since
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,3\}\subseteq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1\}$

$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

Implies, $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\right)\geq$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.......................................(1)

Now, $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ and $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ itself $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ inverse so as the set $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ consists of all solutions for $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ of $\left[<[x_{ij\mu L},x_{ij\mu U}],[x_{ijvL},x_{ijvU}],[x_{ij\lambda L},x_{ij\lambda U}]>\right]$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$(as $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$ is idempotent).

Thus $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$.

This gives $\left(\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\right)$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

That is $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Now by (1) $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[H_{ij\mu L},H_{ij\mu U}],[H_{ijvL},H_{ijvU}],[H_{ij\lambda L},H_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Hence $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\in\beta$

Thus for each $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$ $\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$ there exists a unique element in β.

Conversely, for any $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$ β,

$\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
$+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\geq\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$
with $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

$\geq\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

Hence $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]+\left[<[K_{ij\mu L},K_{ij\mu U}],[K_{ijvL},K_{ijvU}],[K_{ij\lambda L},K_{ij\lambda U}]>\right]$

$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]=\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]$

So, Now, $\left[<[G_{ij\mu L},G_{ij\mu U}],[G_{ijvL},G_{ijvU}],[G_{ij\lambda L},G_{ij\lambda U}]>\right]\in$
$\left[<[P_{ij\mu L},P_{ij\mu U}],[P_{ijvL},P_{ijvU}],[P_{ij\lambda L},P_{ij\lambda U}]>\right]\{1,4\}$.

3. Conclusion

A technique for determining an IVNFM's g-inverse is explained. The g-inverse does not exist for all IVNFMs. In this study, the conditions for the existence of the g-inverse are examined. More investigation is required for the existence of g-inverse of all IVNFMs. In the next paper we try to prove some related properties of g-inverse of IVNFM.

References

1. L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).

2. K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96 (1986).

3. J. Cen, Fuzzy matrix partial ordering and generalized inverses, Fuzzy Sets and Systems, 15, 453-458 (1999).

4. J. Cen, On generalized inverses of fuzzy matrices, Fuzzy Sets and Systems, 5(1), 66-75 (1991).

5. S.K. Khan and M. Pal, Intuitionistic fuzzy tautological matrices, Journal of Physical Science, 8, 92-100 (2003).

6. A.R. Meenakhi and C. Inbam, The minus partial order in fuzzy matrices, The Journal of Fuzzy Mathematics, 12(3), 695-700 (2004).

7. S.K. Mitra, Matrix partial order throgh generalized inverses: unified theory, Linear Algebra and its Applications, 148, 237-263 (1991).

8. L.J. Xin, Convergence of power of a controllble fuzzy matrices, Fuzzy Sets and System, 45, 313-319 (1992).

9. S.K. Shyamal and M. Pal, Interval-valued fuzzy matrices, The Journal of Fuzzy Mathematics, 14(3), 583-604 (2006).

10. A. K. Shyamal and M. Pal, Two new operators on fuzzy matrices, J. Applied Mathematics and Computng, 15, 91107 (2004).

11. M. Dehghan, M. Ghatee and B. Hashemi, The inverse of a fuzzzy matrix of fuzzy numbers, International Journal of Computer Mathematics, 86(8), 1433-1452 (2009).

12. M. Panigrahi and S. Nanda, Intuitionistic fuzzy relations over intuitionistic fuzzy sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 15(3), 675-688 (2007).

13. M. Pal, Intuitionistic fuzzy determinant, V.U.J. Physical Sciences, 7, 87-93 (2001).

14. M. Pal, S.K. Khan and A.K. Shyamal, Intuitionistic fuzzy matrices, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 8(2), 51-62 (2002).

15. A. K. Shyamal and M. Pal, Distance between intuitionistic fuzzy matrices and its applicatins, Natural and Physical Science, 19(1), 39-58 (2005).

16. A. K. Shyamal and M. Pal, Distance between intuitionistic fuzzy matrices, V.U.J. Physical Sciences, 8, 81-91 (2002).

17. S. Sriram and P. Murugadas, On semiring of intuitionistic fuzzy matrices, Applied Mathematical Science, 4(23), 1099-1105 (2010).

18. T. K. Mondal and S. K. Samanta, Generalized intuitionistic fuzzy sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 10(4), 839-862 (2002).

19. M. Bhowmik and M. Pal, Generalized intuitionistic fuzzy matrices, Far-East Journal of Mathematical Sciences, 29(3), 533-554 (2008).

20. M. Bhowmik and M. Pal, Some results on generalized interval-valued intuitionistic fuzzy sets, International Journal of Fuzzy Systems, 14(2), 193-203 (2012).

21. M. Bhowmik and M. Pal, Generalized interval-valued intuitionistic fuzzy sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 18(2), 357-371 (2010).

22. S.K. Khan and A. Pal, The generalized inverse of intuitionistic fuzzy matrix, Journal of Physical Sciences, 11, 62-67 (2007).

23. A.K. Adak, M. Bhowmik and M. Pal, Some properties of generalized intuitionistic fuzzy nilpotent matrices over distributive lattice, Fuzzy Inf. and Eng., 4(4), 371-387 (2012).

24.Rajkumar Pradhan and Madhumangal Pal The Generalized Inverse of Atanassov’s Intuitionistic Fuzzy Matrices ,International Journal of Computational Intelligence Systems, Vol. 7, No. 6 (December 2014), 1083-1095.

25. Smarandache,F, Neutrosophic set, a generalization of the intuitionistic fuzzy set. Int J Pure Appl Math.; .,(2005),.24(3):287–297.